Chapitre 28 : Fonctions de deux variables

Table des matières

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et fonctions continues **2**
1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ 2
1.2 Fonctions continues 2

2 Dérivées partielles **4**
2.1 Définition 4
2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et gradient 5

3 Dérivées partielles et composées **8**
3.1 Dérivée selon un vecteur 8
3.2 Composition à gauche 8
3.3 Dérivée selon un chemin 9
3.4 Dérivée d'une fonction après un changement de variables 9

4 Extremum et point critique **10**

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire, de la norme et de la distance euclidienne.

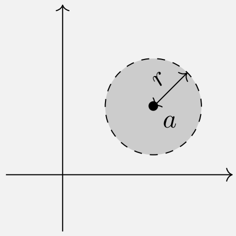
1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et fonctions continues

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1 (boule ouverte de $\mathbb{R}^2$)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
La boule ouverte de centre a et de rayon r, notée $B(a,r)$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la distance euclidienne à a est strictement inférieure à r *i.e.*

$$B(a,r) = \{b \in \mathbb{R}^2,\ \|a-b\| < r\}.$$



Remarque : On peut définir de manière analogue la boule fermé de centre a et de rayon r par

$$\overline{B}(a,r) = \{b \in \mathbb{R}^2,\ \|a-b\| \leqslant r\}.$$

Définition 1.2 (ouvert de $\mathbb{R}^2$)

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un ouvert si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0, \quad B(a,r) \subset U.$$

Remarque : Intuitivement, une partie U est ouverte si U ne contient pas sa "frontière".

Exemple 1.3 :

1. Montrer que le demi-plan $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ est ouvert.
2. Montrer que le demi-plan $H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0\}$ n'est pas ouvert.
3. Soit $c \in \mathbb{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la boule ouverte $B(c,R)$ est ouverte.

1.2 Fonctions continues

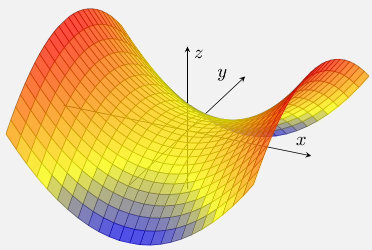
Jusqu'à la fin du chapitre, U désignera un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Notation : Soit f une fonction définie sur U et $a = (x,y) \in U$, on notera indifféremment $f(x,y)$ ou $f(a)$.

Définition 1.4 (graphe)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **graphe** de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in U\}.$$



Définition 1.5 (fonction continue)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(b) \underset{b \to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall b \in U, \qquad \Big(\|a - b\| \leqslant \eta \implies |\ell - f(b)| \leqslant \varepsilon \Big).$$

- On dit que f est **continue en** a si $f(b) \underset{b \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est **continue** si, pour tout $a \in U$, f est continue en a.

Vocabulaire : Les points b de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|a - b\| \leqslant \eta$ sont dits au voisinage de a. C'est l'analogue des voisinages réels, en remplaçant la valeur absolue par la norme (et donc les intervalles $[a - \eta, a + \eta]$ par les boules fermées $\overline{B}(a,\eta) = \{b \in \mathbb{R}^2,\ \|a - b\| \leqslant \eta\}$).

Exemple 1.6 : Montrez que les fonctions $f_1 : (x,y) \longmapsto x$ et $f_2 : (x,y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Attention, pour montrer qu'une fonction f de deux variables est continue en (x_0,y_0), il ne suffit pas de montrer que les fonctions $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0. (c.f. ex. 2.5)

Remarque : La caractérisation séquentielle de la continuité reste valable pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.7 (stabilité par les opérations algébriques)

Soient $a \in U$ et $f,g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a.

- Pour tout $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est continue en a.
- Si $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en a.
- fg est continue en a.
- Si $g(a) \neq 0$, alors f/g est continue en a.

Proposition 1.8 (composition à gauche)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle contenant $f(U)$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue en $a \in U$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition 1.9 (composition à droite par une fonction d'une seule variable)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et γ_1,γ_2 deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\gamma : t \longmapsto (\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ soit à valeurs dans U.
Si γ_1 et γ_2 sont continues en $a \in I$ et f continue en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma : t \longmapsto f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ est continue en a.

Proposition 1.10 (composition à droite par une fonction de deux variables)

Soient V un ouvert non vides de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et γ_1,γ_2 deux fonctions de V dans $\mathbb{R}$ telles que $\gamma : b \longmapsto (\gamma_1(b),\gamma_2(b))$ soit à valeurs dans U.
Si γ_1 et γ_2 sont continues en $a \in V$ et f continue en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma : b \longmapsto f(\gamma_1(b),\gamma_2(b))$ est continue en a.

2 Dérivées partielles

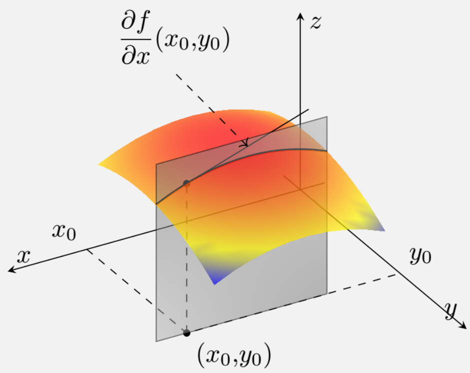
2.1 Définition

Définition 2.1 (dérivées partielles)

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a_0 = (x_0,y_0) \in U$.

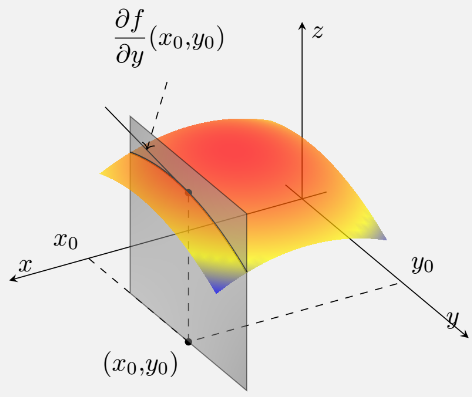
- Si l'application partielle $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} D_1(y_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right.$ définie sur $D_1(y_0) = \{x \in \mathbb{R},\, (x,y_0) \in U\}$, est dérivable en x_0, on dit que f admet une <u>première dérivée partielle</u> en (x_0,y_0) et on note :

$$\partial_1 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \varphi_1'(x_0).$$



- Si l'application partielle $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} D_2(x_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$ définie sur $D_2(x_0) = \{y \in \mathbb{R},\, (x_0,y) \in U\}$, est dérivable en y_0, on dit que f admet une <u>deuxième dérivée partielle</u> en (x_0,y_0) et on note :

$$\partial_2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \varphi_2'(y_0).$$



Exemple 2.2 :

1. Calculer (si elles existent) les dérivées partielles de la fonction $f : (x,y) \mapsto 2x + 4xy^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x > 0\}$. Calculer (si elles existent) les dérivées partielles de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y. \end{array} \right.$$

Proposition 2.3 (opérations sur les dérivées partielles)

Soient f,g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f et g admettent des dérivées partielles en a, alors :

- pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}(a) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \mu\frac{\partial g}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}(a) = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mu\frac{\partial g}{\partial y}(a).$$

- fg admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(fg)}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial y}(a).$$

- si g ne s'annule pas en a alors $1/g$ admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(1/g)}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g^2(a)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(1/g)}{\partial y}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(a)}{g^2(a)}$$

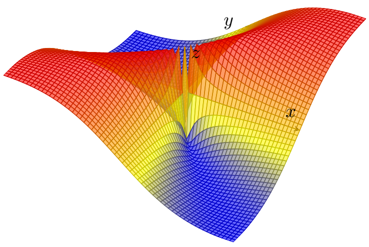
- si g ne s'annule pas en a alors f/g admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g^2(a)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f/g)}{\partial y}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial y}(a)}{g^2(a)}$$

Exemple 2.4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale, i.e. qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j$. Par produit et combinaison linéaire, f admet des dérivées partielles.

<u>**Attention :**</u> L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

Exemple 2.5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.



Graphe de f

2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et gradient

Définition 2.6 (fonction de classe $\mathscr{C}^1$)

Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de <u>classe $\mathscr{C}^1$</u> si f admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.
On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition 2.8 (gradient)

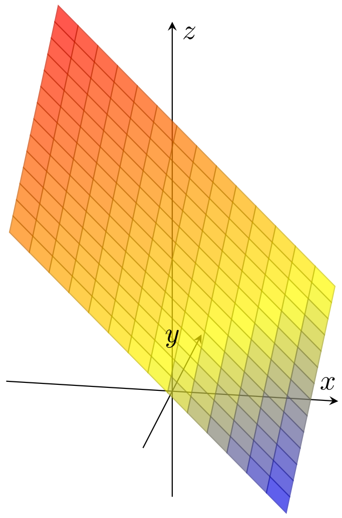
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

On appelle gradient de f et on note ∇f l'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a & \longmapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \end{array} \right.$.

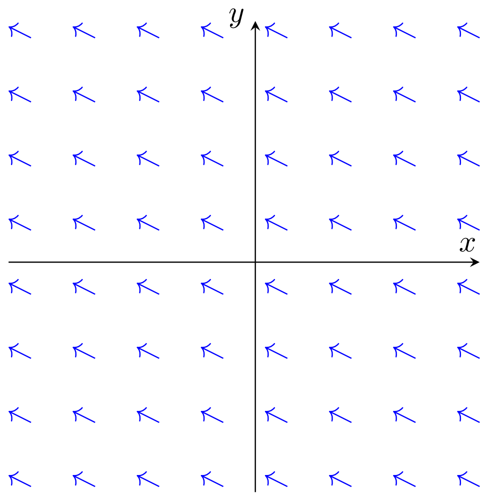
Remarque : L'application ∇f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^2$, c'est un champ de vecteurs. On représente souvent de telles fonctions dans le plan, en affichant pour de nombreux point $a = (x,y)$, le vecteur $\nabla f(x,y)$ en prenant pour origine le point $a = (x,y)$.

Exemples 2.9 :

- Si $f : (x,y) \longmapsto \alpha x + \beta y + \gamma$, alors $\nabla f : (x,y) \longmapsto (\alpha,\beta)$. Le gradient de f est constant.

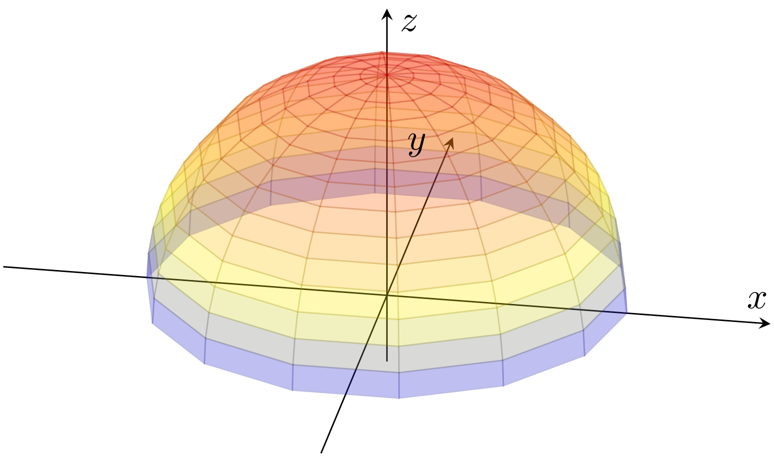


Graphe de f.

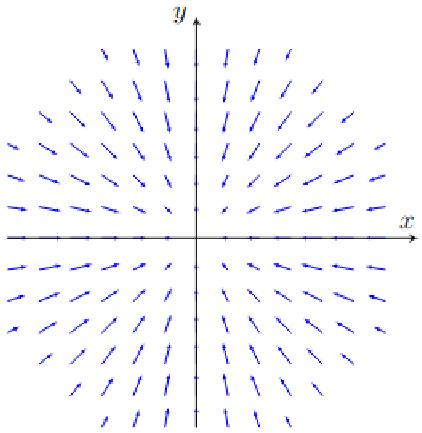


Représentation du champ de vecteurs ∇f.

- Si $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$ définie sur $B(0,1)$, alors $\nabla f : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$.



Graphe de f.



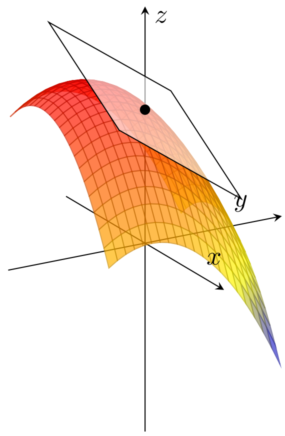
Représentation du champ de vecteurs ∇f.

Théorème 2.10 (développement limité d'ordre 1)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a_0 \in U$.
Alors
$$f(a) \underset{a \to a_0}{=} f(a_0) + (\nabla f(a_0)|a - a_0) + o(\|a - a_0\|),$$

Remarques : Notons (x_0,y_0) les coordonnées de a_0.

- Le théorème précédent affirme que la fonction affine
$$(x,y) \longmapsto f(a_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a_0)$$
approche au premier ordre la fonction f au voisinage de a_0.
- Le plan d'équation
$$\boxed{z = f(a_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a_0)}$$
qui est la graphe de cette fonction affine est appelé la **plan tangent** du graphe de la fonction f en a_0, c'est-à-dire dire de la surface d'équation $z = f(x,y)$.



- Le théorème précédent peut aussi s'écrire :
$$f(x_0 + h,y_0 + k) \underset{(h,k) \to (0,0)}{=} f(a_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + o(\|(h,k)\|).$$

Corollaire 2.11 (caractère $\mathscr{C}^1$ implique la continuité)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Alors f est continue sur U.

Interprétation géométrique du gradient :

On a
$$f(a_0 + v) \underset{v \to (0,0)}{=} f(a_0) + (\nabla f(a_0)|v) + o(\|v\|).$$
Justifions le fait que le gradient donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.
Supposons que $\nabla f(a_0) \neq 0$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\nabla f(a_0)|v) \leqslant \|\nabla f(a_0)\|\|v\|$, avec égalité si et seulement si v a le même sens et la même direction que $\nabla f(a_0)$ (c'est-à-dire s'ils sont positivement liés).
Donc l'approximation affine $g : v \longmapsto f(a_0) + (\nabla f(a_0)|v)$ de f en a_0 est maximale pour v qui a même sens et même direction que $\nabla f(a_0)$ parmi l'ensemble des vecteurs v de même norme.

Proposition 2.12 (opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

Soient $f,g \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$.

- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Si g ne s'annule pas sur U, alors $1/g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Si g ne s'annule pas sur U, alors f/g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

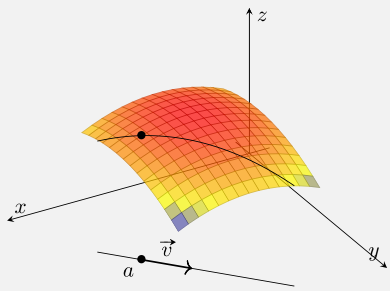
3 Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 3.1 (dérivée directionnelle)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^2$.
Si $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, on dit que <u>f admet une dérivée en a selon le vecteur v</u> et on note :

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$



Remarques :

- L'application $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est définie au voisinage de 0 car U est un ouvert.
- Pour $v = (1,0)$, on a $D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et pour $v = (0,1)$, on a $D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Proposition 3.2 (le caractère $\mathscr{C}^1$ implique l'existence des dérivées directionnelles)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, $a \in U$ et $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$.
Alors f admet une dérivée directionnelle en a selon le vecteur v et on a :

$$D_v f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) = (\nabla f(a)|v).$$

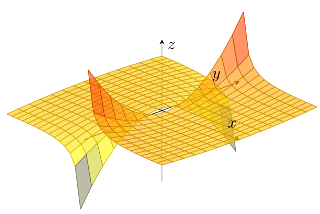
Exemple 3.3 : Calculer la dérivée de l'application $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1,2)$ suivant le vecteur $v = (3,5)$ de deux façons différentes.

Remarque : Attention, une fonction peut admettre une dérivée en un point selon n'importe quel vecteur sans être même continue en ce point.

Exemple 3.4 :

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} \text{ pour } x \neq 0; \\ y \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$.

Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon n'importe quel vecteur mais n'est pas continue en ce point.



3.2 Composition à gauche

Proposition 3.5 (composition à gauche et dérivation)

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle que $f(U) \subset I$ et $g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$.
Alors, $g \circ f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et pour tout $a \in U$:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a) = g'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a) = g'(f(a))\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

3.3 Dérivée selon un chemin

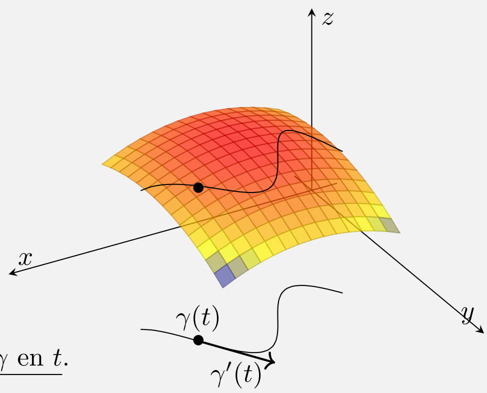
Théorème 3.6 (première règle de la chaîne)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et I un intervalle non trivial.
Soit $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\gamma_1(t),\gamma_2(t)) \end{array} \right.$ tel que γ_1 et γ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\gamma(I) \subset U$.
Alors $f \circ \gamma : t \longmapsto f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$
et pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

En notant $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))$, cette égalité s'écrit

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))$$



La dérivée $(f\circ\gamma)'(t)$ s'appelle la <u>dérivée de f selon l'arc γ en t</u>.

Remarques :

- La dérivée de f selon l'arc γ en t est égale à la dérivée de f en $\gamma(t)$ selon le vecteur $\gamma'(t)$.
- La conclusion du théorème peut se réécrire $\forall t \in I, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t)$.

Exemple 3.7 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $g : t \longmapsto f(t^2,t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

<u>**Interprétation géométrique du gradient avec les lignes de niveaux :**</u>

On appelle ligne de niveau d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble $\{(x,y) \in U,\ f(x,y) = c\}$ tel que $c \in \mathbb{R}$.
Si la fonction γ paramètre une ligne de niveau, c'est-à-dire si la fonction $f \circ \gamma$ est constante, alors sa dérivée est nulle donc, pour tout $t \in I$, $(\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t)) = 0$; le gradient $\nabla f(\gamma(t))$ est donc orthogonal au vecteur $\gamma'(t)$ qui dirige la tangente au point $\gamma(t)$ de la ligne de niveau.
On dit que le gradient ∇f est orthogonal aux lignes de niveau.

3.4 Dérivée d'une fonction après un changement de variables

Théorème 3.8 (deuxième règle de la chaîne)

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
Soient $\varphi,\psi \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ telles que $\Phi : (u,v) \longmapsto (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ soit à valeurs dans U.
Alors, l'application $f \circ \Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(u,v) \in V$:

- $\dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$;
- $\dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)$.

Remarque : Pour différentier les éléments de U et de V, on a noté (x,y) les éléments de U et (u,v) ceux de V. On a donc noté $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ pour les dérivées partielles de fonctions définies sur U et $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ pour les dérivées partielles de fonctions définies sur V. On peut toutefois écrire ce théorème uniquement avec x et y.

Exemple 3.9 : Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On définit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos(\theta),r\sin(\theta)) \end{array} \right.$.
Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

4 Extremum et point critique

Définition 4.1 (extremum)

Soit V une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ (pas forcément ouverte), $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in V$.

- On dit que f admet un <u>maximum</u> en a si : $\forall v \in V,\ f(v) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un <u>minimum</u> en a si : $\forall v \in V,\ f(v) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet un <u>maximum local</u> en a si : $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta),\ f(v) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un <u>minimum local</u> en a si : $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta),\ f(v) \geqslant f(a)$.
- On dit que f admet un <u>extremum</u> en a si f admet un maximum ou un minimum en a.
- On dit que f admet un <u>extremum local</u> en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.

Remarque : La condition $\exists \eta > 0, \forall v \in V \cap B(a,\eta)$ peut simplement se résumer par “au voisinage de a”. Lorsque nous avons donné la notion de voisinage sur $\mathbb{R}$, nous avons mis des inégalités larges mais la notion est équivalente avec des inégalités strictes.

Définition 4.2 (point critique)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$.
On dit que a est un <u>point critique</u> de f si $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, c'est-à-dire si $\nabla f(a) = 0$.

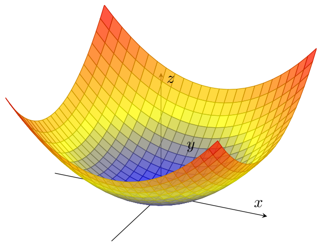
Théorème 4.3 (condition nécessaire pour un extremum local)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

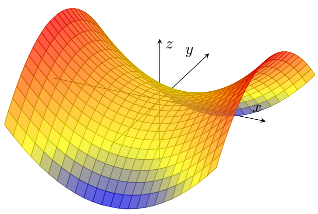
Remarques :

- Ce résultat permet de connaître les extrema locaux possibles en résolvant l'équation $\nabla f(a) = 0$. Il faut ensuite les étudier cas par cas (et étudier la fonction sur le bord du domaine si celui-ci n'est pas un ouvert).
- Attention la réciproque est fausse.

Exemple 4.4 : Soient $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ et $g : (x,y) \longmapsto x^2 - y^2$ définies sur $\mathbb{R}^2$.



Graphe de f.



Graphe de g.

Étudier les extrema de f et de g.